LIMITES – EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=-x^4$ 3) $f(x)=-3+\dfrac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x)=-x^3$ 5) $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$ 6) $f(x)=\sqrt{-x}$

Déterminez les limites suivantes

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-\dfrac{1}{x})$ 8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-4+\dfrac{1}{x})$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-4}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-2+\dfrac{3}{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(-x+1)$ 13) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-3t(t-4)\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

15) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $a=2$ 16) $f(x)=\dfrac{-2}{x+3}$, $a=-3$ 17) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=0$

Exercice n°2.

Déterminer les limites de $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x=2$ et $x=-1$.

Exercice n°3.

Déterminez les limites suivantes

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}$ en $+\infty$ 2) $g(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

Exercice n°4.

Vrai ou Faux ?

1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n°5.

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x)=ax+\dfrac{2}{x-b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to5}f(x)=11$

Exercice n°6. Déterminez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-2x+10$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3+5x-2$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^3+1}{4x+16}$ 5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Exercice n°7.

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et telles que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=7$

Exercice n°8.

Déterminez les limites suivantes : 1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$

Exercice n°9.

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\frac{2}{x} \leq f(x)-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

3) $f(x) \geq 2x-3$ 4) $f(x) \geq x^2-3$

Exercice n°10.

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x}+4$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$
2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n°11.

Soit la fonction f définie sur $D=[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout x de D, on a : $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice n°12.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=2x-\sin x$
1) Montrer que pour tout x réel $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$
2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n°13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent): 1) $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+1}$;

Exercice n°14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

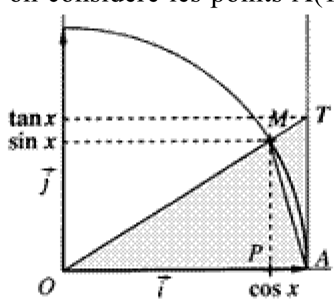
1) Montrer que pour $x>0$, $x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2$

2) En déduire pour $x>0$ un encadrement de $f(x)$.

3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n°15.

Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(1;0), M(cos x;sin x), P(cos x;0) et T(1;tan x). Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
2) En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.
3) Déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x<0$ et $x>0$).

Exercice n°16.

En utilisant le résultat $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

1) $x \to \frac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \to \frac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \to \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \to \frac{\tan x}{x}$

Exercice n°17.

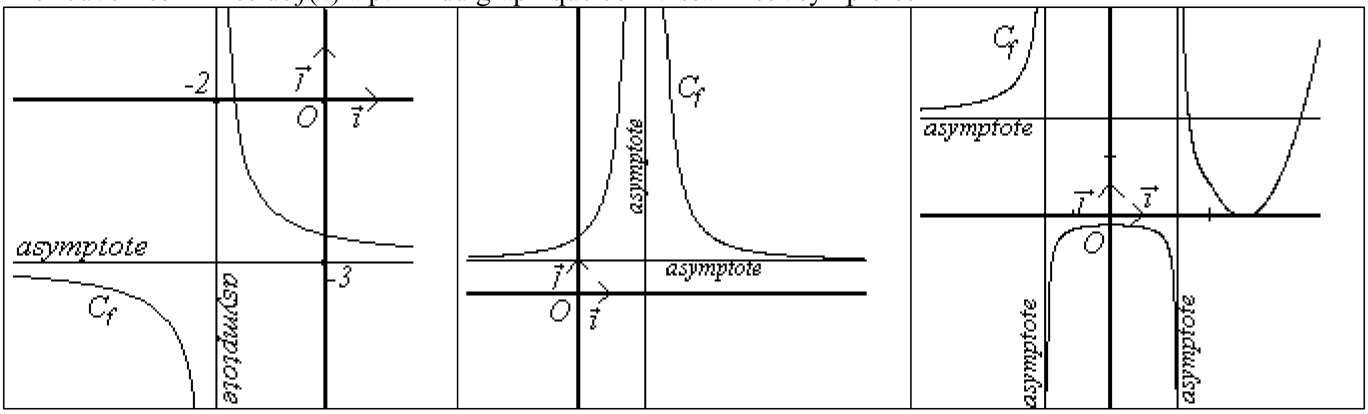
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice n°18.

Déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}$

Exercice n°19.

Retrouver les limites de *f*(*x*) à partir du graphique connaissant les asymptotes

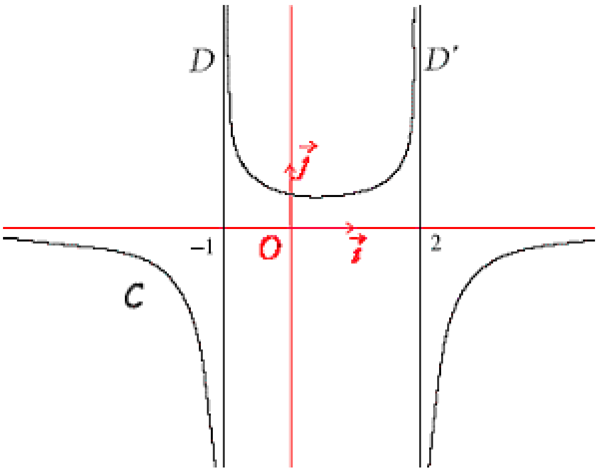


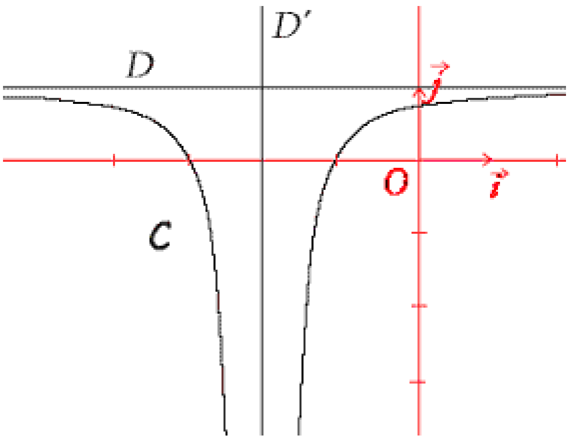
Exercice n°20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1^er^ cas $f_1(x)=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x)=-\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

2^ème^ cas $g_1(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$





Exercice n°21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{3x-1}{x}$ 2) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ 3) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 4) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ 5) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Exercice n°22.

Soit f la fonction $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n°23.

Soit f la fonction $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Déterminez trois nombres réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ pour $x\neq -2$
2) Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n°24.

Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Exercice n°25.

Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote pour $x\to+\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

Exercice n°26.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout x de D, on ait : $f(x)=ax^2+b+\dfrac{c}{x+3}$
3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax^2+b))$
4) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=x^2-4$. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x.

Exercice n°27.

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2-2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

1) Peut-on conjecturer la limite de f en zéro ?

2) En développant $\left(50+x^{20}\right)^2$, simplifier l'expression de *f(x)* pour $x\neq 0$. Calculer alors la limite de f en zéro. Surprenant, non ?

Exercice n°28.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$ 4) $\lim\limits_{x\to0}(x-4+\ln x)$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (Poser $X=\dfrac{1}{x}$) 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X=2x$)

Exercice n°29.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+4e^x\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3e^x\right)$

Exercice n°30.

Etudiez les limites de la fonction f donnée aux bornes de son ensemble de définition D, et trouver les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

1) $f(x)=e^{-x}-4$ 2) $f(x)=\dfrac{3}{1+e^{x}}$ 3) $f(x)=x-2+xe^{x}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}-1}$

Exercice n°31.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2) Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C.

LIMITES – CORRECTION

Exercice n°1

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ donc par multiplication $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(ne pas confondre $-x^4$ et $(-x)^4 = x^4$)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} -3 + \frac{1}{x} = -3$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par composition avec la fonction racine, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1-\frac{1}{x} = +\infty$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 - 4 = 0 - 4 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x}) = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3 = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 4 = -\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-4} = 0$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2 + \frac{3}{x} = -2$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-2+\frac{3}{x}} = -\infty$

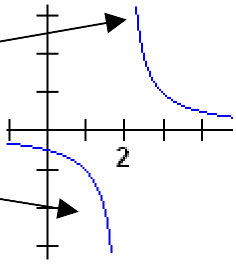
12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x(-x+1) = -\infty$

13) $\lim\limits_{t\to-\infty} -3t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t - 4 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(-3t(t-4)\right) = -\infty$

14) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$) donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x}+3\right) = -\infty$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x - 2 = 0^+$ (car $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$. De la même manière $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x - 2 = 0^-$ (car $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

Les limites « à gauche » et « à droite » de 2 diffèrent.



16) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} x + 3 = 0^+$ (car $x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0$) donc par quotient (attention à la règle des signes !), $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \frac{-2}{x+3} = -\infty$.

De la même manière $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} x + 3 = 0^-$ (car $x < -3 \Leftrightarrow x + 3 < 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \frac{-2}{x+3} = +\infty$.

17) Puisque pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 = 0^+$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Les limites à gauche et à droite de 0 sont ici identiques.

Exercice n°2

Il est clair que $\lim_{x\to -1}(x+1)(x-2)=0$ ainsi que $\lim(x+1)(x-2)=0$, mais encore faut-il connaître le signe de l'expression $D(x)=(x+1)(x-2)$.

Un tableau de signes nous fournit :

$D(x)<0$ si $x\in\left]-1;2\right[$

$D(x)>0$ si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x+1)(x-2)=0^+$. Comme $\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x=-1$, on conclut, par quotient, que $\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)(x-2)=0^-$, donc par quotient, $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=+\infty$.

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+1)(x-2)=0^-$. Comme $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x=2$, on conclut, par quotient, que $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x+1)(x-2)=0^+$, donc par quotient, $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=+\infty$

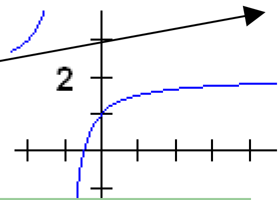
Exercice n°3

1) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$. En notant $u=\dfrac{2x^2-1}{x}$ on a donc $\lim_{x\to+\infty}u=+\infty$ et puisque $\lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$, en composant, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. En notant $u=\dfrac{1}{x}$ on a donc $\lim_{x\to-\infty}u=0$ et puisque $\lim_{u\to 0}\cos(u)=1$, en composant, on obtient $\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

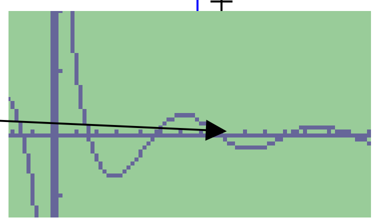
Exercice n°4

1) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$ est strictement croissant sur $\left[0;+\infty\right[$, positive, et pourtant $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$



2) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ vérifie $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ (par encadrement, voir exercice n°), et pourtant sa courbe C_f « oscille » autour de 0.

Cela signifie que les nombres réels *f*(*x*) ne sont pas tous de même signe



3) VRAI. Si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$, cela signifie que tout intervalle centré en -1 contiendra toutes les valeurs de *f*(*x*) pour *x* suffisamment grand. Ainsi, pour *x* suffisamment grand, on aura, par exemple $-1{,}5\le f(x)\le -0{,}5$ donc les nombres *f*(*x*) seront tous de même signe

Exercice n°5

Puisque $\lim_{x\to 3^+}f(x)=3a+\dfrac{2}{3-b}$, pour avoir $\lim_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$, il est nécessaire d'avoir $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{2}{x-b}=+\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 3^+}x-b=0^+$, donc $b=3$. Ainsi, pour tout $x\neq 3$, $f(x)=ax+\dfrac{2}{x-3}$ et l'information $\lim_{x\to 5}f(x)=11$ fournit l'indication

$f(5)=11\Leftrightarrow 5a+\dfrac{2}{5-3}=11\Leftrightarrow 5a=10\Leftrightarrow a=2$

Exercice n°6

1) Puisque $\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -2x+10=-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ »

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1ère manière :

Puisque $x\to+\infty$, on peut supposer $x\neq 0$

Alors $3x^2-2x+10=x^2\left(3-\frac{2x}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)=x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)$ (factorisation par le terme de plus haut degré puis simplification).

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{x^2}=0$, on a, par somme $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)=3$, et puisque $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, on conclut, par produit, que $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)=+\infty$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}3x^2-2x+10=+\infty$

Remarque : Plutôt que de mettre x^2 en facteur dans l'expression $3x^2-2x+10$, on aurait pu mettre $3x^2$ en facteur, de sorte que $3x^2-2x+10=3x^2\left(1-\frac{2x}{3x^2}+\frac{10}{3x^2}\right)=3x^2\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{10}{3x^2}\right)$. On raisonne de la même manière, à savoir $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{3x^2}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{10}{3x^2}\right)=1$, et puisque $\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$, on conclut, par produit, que $\lim_{x\to+\infty}3x^2\left(1-\frac{2}{3x}+\frac{10}{3x^2}\right)=+\infty$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}3x^2-2x+10=+\infty$

2ère manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré ».

On écrit donc $\lim_{x\to+\infty}3x^2-2x+10=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

2) Puisque $\lim_{x\to-\infty}-4x^3=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}5x-2=-\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim_{x\to-\infty}-4x^3+5x-2=\lim_{x\to-\infty}-4x^3=+\infty$

3) On examine les numérateurs et dénominateurs. On trouve $\lim_{x\to+\infty}3x^2+4=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x^2+x+1=+\infty$. On se trouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1ère manière :

Factorisation des deux membres par leur terme de plus haut degré :

Puisque $x\to+\infty$, on peut supposer $x\neq 0$

Alors $\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}=\frac{x^2\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty}3+\frac{4}{x^2}=3$ (par somme), et $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$ (par somme), on déduit, par quotient, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$ c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}=3$

2ère manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est la même que celle du quotient simplifié de leurs termes de plus haut degrés respectifs »

On écrit donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3$

4) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} -8x^3+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x+16=-\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8x^3+1}{4x+16}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{8}^{2}\,\cancel{x}^{\cancel{3}2}}{\cancel{4}\,\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$

5) Puisque $\lim\limits_{x\to2} x^2-x-2=0$ et $\lim\limits_{x\to2} x-2=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{x^2-x-2}{x-2}$ pour «résorber » la forme indéterminée.

Pour tout $x\neq2$, grâce au calcul de $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9$ on détermine les racines du trinôme : $x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$. La forme factorisée du trinôme nous permet de simplifier la fraction :

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ donc $\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$ On conclut que $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}x+1=3$

6) Puisque $\lim\limits_{x\to1} x^2+2x-3=0$ et $\lim\limits_{x\to1} 2x^2-x-1=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Grâce aux calculs des discriminants, on peut factoriser numérateur et dénominateur :

Pour tout $x\neq1$, $\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

7) Puisque $\lim\limits_{x\to9}\sqrt{x}-3=0$ et $\lim\limits_{x\to9}x-9=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ pour «résorber » la forme indéterminée.

Pour tout $x\neq2$, $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+3}$, donc $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$.

<u>Exercice n°7</u>

1) On peut par exemple prendre $f(x)=x+1$ et $g(x)=x$

2) On peut par exemple prendre $f(x)=7x$ et $g(x)=x$

<u>Exercice n°8</u>

1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ »

Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

Pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=+\infty$, et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=0$

2) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}=+\infty$ (car $\lim_{x\to+\infty}x^2+4x+3=+\infty$) et $\lim_{x\to+\infty}-(x+2)=-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée : Pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)=\left(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+3}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}=\frac{x^2+4x+3-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x+2=+\infty$, on déduit que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+x+2=+\infty$, et par quotient, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}=0$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)=0$

Exercice n°9

1) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes » , on a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

2) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes » , on a $\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$

3) Si $f(x)\geq 2x-3$, puisque $\lim_{x\to+\infty}2x-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On ne peut rien conclure de plus.

4) Si $f(x)\geq x^2-3$, puisque $\lim_{x\to+\infty}x^2-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On peut également utiliser ce théorème lorsque $x\to-\infty$. En effet puisque $\lim_{x\to-\infty}x^2-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. On ne peut rien conclure de plus.

Exercice n°10

1) Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on calcule $f(x)-3\sqrt{x}=x-\sqrt{x}+4-3\sqrt{x}=x-4\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on en déduit que pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f(x)-3\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 3\sqrt{x}$

2) Puisque $\lim_{x\to+\infty}3\sqrt{x}=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Exercice n°11

1) Par multiplication par la quantité conjuguée, pour tout $x\in D$,

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

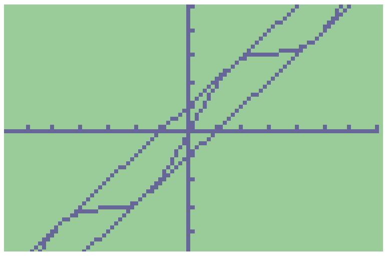
$$=\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

2) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a clairement $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \geq 0$ car $\sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geq 0$. De plus,

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$



Exercice n°12

1) Pour tout x réel $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x+\sin x \leq x+1 \Leftrightarrow x-1 \leq f(x) \leq x+1$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Exercice n°13

1) Puisque pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, alors pour tout x>0, on a $1-1 \leq 1+\cos x \leq 1+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1+\cos x \leq 2$, et par division par $\sqrt{x}$ qui est >0, on déduit que $\dfrac{0}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) Commençons par la limite lorsque $x \to +\infty$. On peut donc supposer que x>0.

Puisque pour tout réel x, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout x>0, on a $\dfrac{-x}{x^2+1} \leq \dfrac{x\sin x}{x^2+1} \leq \dfrac{x}{x^2+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

La limite lorsque $x \to -\infty$ se traite à l'identique : on peut donc supposer que x<0.

Puisque pour tout réel x, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout x<0, on a $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{x\sin x}{x^2+1} \leq \dfrac{-x}{x^2+1}$ (l'inégalité est en sens inverse de la prcédente)

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice n°14

1) Pour x>0 $0<1 \Leftrightarrow x^2<1+x^2$. De plus $(1+x)^2=1+x^2+2x>1+x^2$ car x>0. L'encadrement est ainsi démontré.

2) La fonction racine étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on déduit de l'encadrement $x^2<1+x^2<(1+x)^2$ que $\sqrt{x^2}<\sqrt{1+x^2}<\sqrt{(1+x)^2} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{1+x^2}<|1+x|$

⚠ Ne pas oublier que $\sqrt{x^2}=|x|$

Puisque x>0 et 1+x>0, on a donc $x<\sqrt{1+x^2}<1+x$, et enfin par division par x, $\dfrac{x}{x}<\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}<\dfrac{1+x}{x} \Leftrightarrow 1<f(x)<1+\dfrac{1}{x}$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$, en application du théorème « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Exercice n°15

1) On a clairement $A_1 < A_2 < A_3$

On calcule : $A_1 = \frac{OA \times PM}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2}$, puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire, $A_2 = \frac{x}{2}$ (car un angle de 2π rad correspond à une aire de $\pi r^2 = \pi \, cm^2$, donc un angle de x rad correspond à une aire de $x \times \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$). Enfin $A_3 = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque $A_1 < A_2 < A_3$ alors $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$.

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car x>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car x>0)

3) Puisque pour tout x>0 , cos x < $\frac{\sin x}{x}$ < 1, et puisque $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si x<0, la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives !) sont alors égales à $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$, $A_2 = -\frac{x}{2}$ et $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour x<0, $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$.

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car -x>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car -x>0).

La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n°16

1) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{\cancel{5x}} \frac{\cancel{5x}}{2x} == \frac{5}{2} \times \frac{\sin 5x}{5x}$. En posant $u = 5x$, on a $\lim_{x \to 0} u = 0$, et puisque $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, on en déduit donc que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, donc par produit $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$. Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc en particulier $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ (quitte à poser $u = 3x$), d'où, par produit, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \times \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x}$. Encore une fois, puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$, on conclut, par produit, que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$. Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, on conclut que $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Exercice n°17

1) Si on pose $f(x)=\sqrt{x+6}$, définie sur $[-6;+\infty[$, puisque $f(3)=\sqrt{3+6}=\sqrt{9}=3$, la limite $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ se réécrit $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$. Or f est dérivable sur $]-6;+\infty[$ et pour tout $x\in]-6;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+6}}$ donc $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+6}}=\frac{1}{6}$. Ainsi $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{1}{6}$

2) Si on pose $f(x)=\sin x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f(0)=\sin 0=0$, la limite $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ se réécrit $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\cos x$ donc $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$.

Ainsi $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

3) Si on pose $f(x)=\cos x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, la limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ se réécrit $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\pi/2\right)}{x-\pi/2}$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x$ donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

Exercice n°18

1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ - Si on pose $f(x)=\tan x$, alors $f(0)=0$, et ainsi $\frac{\tan x}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Puisque f est dérivable en 0, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1+\tan^2(0)=1$

2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ - Si on pose $f(x)=\sqrt{x}$, alors $f(1)=1$, et ainsi $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Puisque f est dérivable en 1, $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}$ - On commence à écrire $\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}=\frac{2}{6}\times\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$. Pour étudier $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$, on pose $f(x)=\cos 2x$.

Ainsi $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, et ainsi $\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$.

Puisque f est dérivable en $\frac{\pi}{6}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$,

et ainsi $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°19

1) Sur le premier graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. De plus, la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à C_f, et les limites diffèrent à droite et à gauche de -2. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$

2) Sur le deuxième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. De plus, la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f, et les limites à droite et à gauche de 2 sont identiques. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$

3) Sur le troisième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à C_f uniquement en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$. De plus, la courbe C_f possède deux asymptotes verticales : les droites d'équation $x=2$ et $x=-2$. Les limites à droite et à gauche de ces valeurs sont différentes. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$.

Exercice n°20

1) La première courbe correspond à $f_3(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ car elle présente deux asymptotes verticales synonymes de valeurs interdites égales à -1 et 2, ce qui ne correspond pas à $f_1(x)$. De plus, la courbe se situant en dessous de l'axe des abscisses en $+\infty$ et en $-\infty$, on devrait avoir une fonction « négative » dans ces deux voisinages, ce qui n'est pas le cas de $f_2(x)$

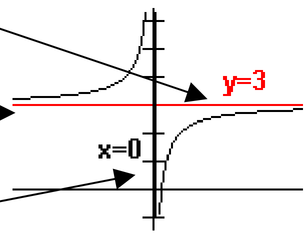
2) La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction étant égale à 1, on peut éliminer directement $g_1(x)$ et $g_3(x)$, pour ne garder que $g_2(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Exercice n°21

1) Pour tout $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}=3-\dfrac{1}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x}=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{1}{x}=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.



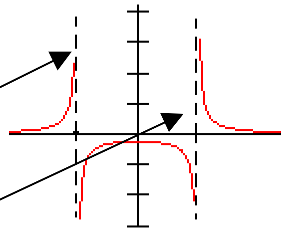
De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3-\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 3-\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f.

2) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\dfrac{1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} -\dfrac{1}{x^2}=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f.

3) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à C_f.

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-4}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$ De plus $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{1}{x^2-4}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$

donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à C_f.



Enfin $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{x^2-4}=+\infty$

donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f.

5) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Les racines du dénominateur sont 1 et 2. On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à C_f. Enfin $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f.

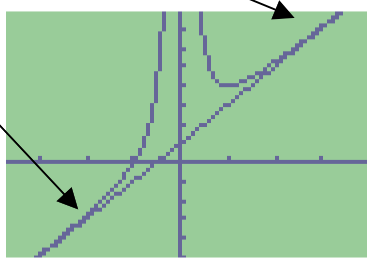
Exercice n°22

Puisque $\lim\limits_{x\to0}2x+1=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0\\ou\,x<0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$, on conclut, par somme, que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0\\ou\,x<0}}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+1=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

De plus, pour tout $x\neq0$, $f(x)-(2x+1)=2x+1+\frac{1}{x^2}-(2x+1)=\frac{1}{x^2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

De la même manière $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$. On en conclut que la droite D d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour connaître la position relative de D et C_f, on étudie le signe de $f(x)-(2x+1)=\frac{1}{x^2}$. Pour tout $x\neq0$, $f(x)-(2x+1)=\frac{1}{x^2}>0$, donc pour tout $x\neq0$, $f(x)>2x+1$. Ceci signifie que sur tout son ensemble de définition, C_f est au dessus de D.



Exercice n°23

1) f est définie si et seulement si $x+2\neq0$ donc $D=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. Pour tout $x\in D$,

$$ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)}{x+2}+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

Donc $ax+b+\frac{c}{x+2}=f(x)$ si et seulement si $\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}=\frac{2x^2+3x-1}{x+2}$ donc si et seulement si $\begin{cases}a=2\\2a+b=3\\2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=1\end{cases}$. Ainsi, pour tout $x\in D$, $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+2}$

2) A partir de l'écriture $f(x)=2x-1+\frac{1}{x+2}$, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$.

Mais surtout, puisque, pour tout $x\neq-2$, $f(x)-(2x-1)=2x-1+\frac{1}{x+2}-(2x-1)=\frac{1}{x+2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0$, donc la droite D d'équation $y=2x-1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, pour tout $x>-2$, $f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x+2}>0$, donc C_f est au dessus de D sur $]-2;+\infty[$, et pour tout $x<-2$, $f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x+2}<0$, donc C_f est en dessous de D sur $]-\infty;-2[$

<u>Exercice n°24</u>

On calcule, pour tout réel x, $f(x)-x=\frac{x^3}{x^2+1}-x=\frac{x^3}{x^2+1}-x\times\frac{x^2+1}{x^2+1}=\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\frac{-x}{x^2+1}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$ donc la droite D d'équation $y=x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque, pour tout $x>0$, $\frac{-x}{x^2+1}<0$, et pour tout $x<0$, $\frac{-x}{x^2+1}>0$, on en conclut que C_f est au dessus de D sur $]-\infty;0[$ et en dessous de D sur $]0;+\infty[$

<u>Exercice n°25</u> On calcule, pour tout réel $x>1$,

$$f(x)-2x=x+\sqrt{x^2-1}-2x=\sqrt{x^2-1}-x=\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$, on conclut que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$

<u>Exercice n°26</u>

1) f est définie si et seulement si $x+3\neq0$ donc $D=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$.

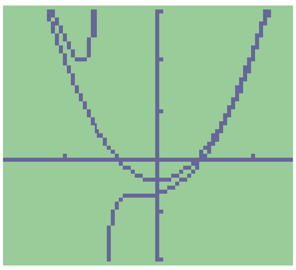
2) Pour tout $x\in D$, $ax^2+b+\frac{c}{x+3}=\frac{(ax^2+b)(x+3)}{x+3}+\frac{c}{x+3}=\frac{ax^3+3ax^2+bx+3b+c}{x+3}$

Donc $ax^2+b+\frac{c}{x+3}=f(x)$ si et seulement si $\frac{ax^3+3ax^2+bx+3b+c}{x+3}=\frac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$ donc si et seulement si

$\begin{cases}a=1\\3a=3\\b=-4\\3b+c=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=-8\end{cases}$. Ainsi, pour tout $x\in D$, $f(x)=x^2-4-\frac{8}{x+3}$

3) A partir de l'écriture $f(x)=x^2-4-\frac{8}{x+3}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=-\infty$ (par soustraction car $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{8}{x+3}=+\infty$) et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=+\infty$

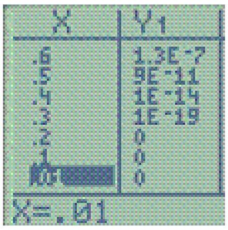
4) Pour tout $x\in D$, $f(x)-(x^2-4)=x^2-4-\frac{8}{x+3}-(x^2-4)=-\frac{8}{x+3}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\frac{8}{x+3}=0$, on déduit l'existence d'une **<u>PARABOLE ASYMPTOTE</u>** à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.



De plus, si $x>-3$, $-\frac{8}{x+3}<0$, et pour tout $x<-3$, $-\frac{8}{x+3}>0$,
on en conclut que C_f est au dessus de C_g sur $]-\infty;-3[$ et en dessous de C_g sur $]-3;+\infty[$.

Exercice n°27

La calculatrice fournit, grâce au menu TABLE :



On est donc tenté de conjecturer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Or, pour tout $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2-2500}{x^{20}}=\dfrac{2500+100x^{20}+x^{40}-2500}{x^{20}}=\dfrac{100x^{20}+x^{40}}{x^{20}}=100+x^{20}$

Ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=100$!

Exercice n°28

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, donc par produite, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ donc par soustraction, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2-3\ln x\right)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to 0} x-4=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-4+\ln x\right)=-\infty$

5) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, on pose $u=x^2$, et puisque $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2\right)=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0^+$ on conclut par quotient que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

7) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». On transforme l'écriture : $x-\ln x=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ (limite connue), on déduit successivement que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$, puis par produit, que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x=+\infty$

8) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln(1)=0$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty\times 0$ ». En posant $X=\dfrac{1}{x}$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} X=0^+$, la limite cherchée devient $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{1}{X}\ln(1+X)$. Or un résultat du cours nous indique que $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

9) En posant $X=2x$, la limite cherchée devient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+X)}{X}$. Et puisque $\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$, on conclut que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+X)}{X}=2$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=2$

Exercice n°29

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$), donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+4e^x\right)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x=+\infty$, donc par soustraction, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3e^x\right)=-\infty$

Exercice n°30

1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ ($\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$ où on a posé $u=-x$), on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$ donc la droite d'équation $y=-4$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = 0$, alors par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (limite du cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$, alors par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Mais comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

4) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

Enfin, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^x - 1 = 0^-$ (car $x<0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$), on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{e^x-1} = -\infty$. Et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x - 1 = 0^+$ (car $x>0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$), on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à C_f.

Exercice n°31

1) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$,

2) On transforme l'expression : Pour tout réel x, $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ($\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ où on a posé $u=-x$), on déduit, par somme et quotient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3) La courbe admet donc deux asymptotes horizontales :

La droite d'équation $y=0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y=1$ en $+\infty$